Risolvere i seguenti QUESITI e rispondere alle domande nell'ambito di una trattazione organica sul tema dei 'percorsi rettilinei' e delle 'linee di campo'.

1. Intersecando la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ e il fascio di piani kx+(k-1)y+2kz-4k+1=0, con k parametro reale, si forma una sezione circolare:
   a. Dimostrare che essa è sempre una circonferenza di raggio massimo.
   b. La geometria analitica nello spazio può essere considerata una geometria euclidea?
   c. La circonferenza di raggio massimo, determinata al punto a, può essere considerata una retta?

2. Sono date le superfici sferiche di equazioni
   $x^2+y^2+z^2=20$ e $x^2+y^2+z^2-4x-8y-10z+40=0$.
   a. Verificare che sono tangenti e calcolare il punto di contatto T.
   b. Determinare l'equazione del piano tangente.
   c. Immaginare che le sfere date siano le superfici esterne di due pianeti gemelli vincolati in T: se un raggio di luce cominciasse a viaggiare sul piano tangente, e si dirigesse verso i due pianeti, potrebbe essere deflesso?

3. Un raggio luminoso monocromatico incide su una lastra di vetro. Fissato un opportuno sistema di riferimento cartesiano, in cui le coordinate sono espresse in metri, la superficie della lastra di vetro appartiene al piano a di equazione 2x+y-2z=0 e il raggio incidente ha equazioni parametriche $\begin{cases} x=1-2k \\ y=-1+5k \\ z=6-5k \end{cases}$.
   a. Determinare il punto di incidenza e l'equazione cartesiana del piano che contiene il raggio incidente e quello riflesso.
   b. Relativamente al fenomeno della riflessione, è corretto dire che la luce si comporta come un treno di fotoni che rimbalzano elasticamente su una superficie di vetro piana?

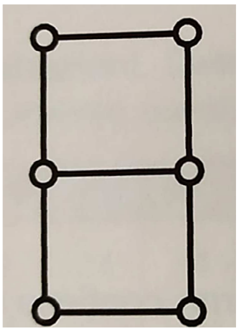
4. Una distribuzione rettilinea e uniforme di carica genera, a 2,0 m di distanza, un campo elettrico di intensità $E=9{,}0\cdot 10^3\,\frac{N}{C}$. Utilizzando un opportuno sistema di riferimento, con le coordinate espresse in metri, la retta su cui sono distribuite le cariche ha equazioni parametriche $\begin{cases} x=2-k \\ y=1+2k \\ z=-1+2k \end{cases}$.
   a. Determinare l'intensità del campo elettrico generato dalla distribuzione considerata nel punto P(2; 4; 5) e le equazioni parametriche della retta s, che rappresenta la linea di campo passante per tale punto.
   b. Se un elettrone si trova inizialmente fermo in P allora si muoverà lungo la linea di campo considerata?
   c. Lo stesso elettrone subirà anche l'azione del campo magnetico generato dalla distribuzione rettilinea di cariche?

Risolvere i seguenti QUESITI e motivare i passaggi.

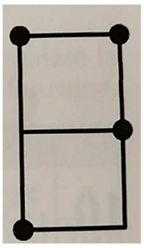
1. Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente a una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

2. Le quattro facce di un dado a forma di tetraedro sono numerate da 1 a 4. Questo dado è truccato in modo che la probabilità p(i) che la faccia i sia nascosta è proporzionale al quadrato di i attraverso un parametro k. Determinare il valore di k.

3. Un carattere della scrittura Braille, destinata ai non vedenti, è formata da punti ottenuti pungendo la carta attraverso almeno uno dei sei tondi della griglia in figura.



   Per esempio questo è il carattere Braille che rappresenta la M:



   Quanti caratteri Braille si possono concepire?

4. Tutti i valori assunti da una variabile casuale uniformemente distribuita stanno nell'intervallo [2,8].
   Con che probabilità i valori assunti dalla variabile casuale cadono nell'intervallo (3,5)?

5. Una variabile aleatoria X è data dalla funzione di ripartizione
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ (x-2)^2 & 2 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}.$$
   Provare che la sua densità di probabilità è la seguente:
   $$f(x) = \begin{cases} 2(x-2) & 2 \le x \le 3 \\ 0 & altrove \end{cases}.$$

Una particolare funzione di densità di probabilità è il modulo al quadrato della funzione d'onda $\Psi(x, y, z, t)$, soluzione quest'ultima dell'equazione di $Schrödinger$.
Illustrare il contesto in cui una tale densità di probabilità si colloca e spiegare quali sostanziali cambiamenti intervengano nella interpretazione probabilistica della realtà e nella logica che sta alla base di tale interpretazione.

Risolvere il seguente PROBLEMA.

Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{2}x^2(3 - 2lnx) + 1 & x > 0 \end{cases}$ definita sull'intervallo [0 ;+∞ [

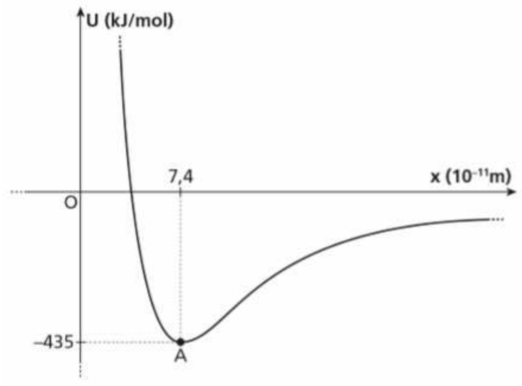
e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

a. Stabilire se f è continua e derivabile in 0.
b. Dimostrare che l'equazione f(x) = 0 ha, sull'intervallo [0 ;+∞ [, un'unica radice reale.
c. Disegnare C e determinare l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa x = 1.
d. Sia n un intero naturale non nullo. Esprimere, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette di equazioni $x = \frac{1}{n}$ e x = 1.
e. Calcolare il limite per n → +∞ di A_n e interpretare il risultato ottenuto.
f. Stabilire l'andamento della successione b_n così definita: $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_n = 1 - 2b_{n-1} \end{cases}$ e della successione $|b_n|$.
g. In un linguaggio di programmazione strutturata scrivere un algoritmo che calcoli la somma dei primi k termini della b_n.

<In matematica il limite ha una duplice valenza. Può indicare infatti sia una estensione verso l'infinito che un vincolo invalicabile. >
Dopo aver spiegato il senso di questa affermazione, introdurre degli esempi tratti dalla Fisica.

Risolvere il seguente PROBLEMA.

Il grafico mostra l'andamento dell'energia potenziale $U(x)$ di due atomi di idrogeno in funzione della distanza x tra i loro nuclei.



1. Dedurre dal grafico di U(x) i valori di max, min, sup e inf della funzione rappresentata e spiegare la differenza tra di essi.
2. Dedurre, dal grafico di U(x), il grafico qualitativo della funzione $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$.
3. Spiegare perché $x_A = 7{,}4 \cdot 10^{-11}\ m$ è la distanza di equilibrio tra i nuclei.
4. Spiegare il significato fisico dei limiti della funzione U(x) per x tendente a zero e a $+\infty$.
5. Dal grafico si deduce l'energia di legame H-H: esprimere tale energia in eV.
6. L'energia di legame di una molecola di H_2 è negativa. Questo è vero per qualunque molecola? Spiegare perché.
7. All'interno di un forno a microonde sono generati fotoni che hanno lunghezza d'onda classica λ=12 cm. Durante il funzionamento di un forno a microonde, le molecole di idrogeno presenti al suo interno si dissociano? Motivare la risposta.

A partire dall'idea di fotone, come pacchetto di energia, spiegare il passaggio tra la fisica classica e quella quantistica.

Risolvere il seguente PROBLEMA.

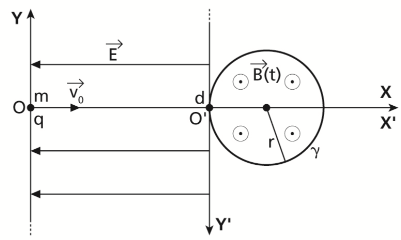
In un piano orizzontale OXY è definito, sulla striscia $0 \leq X \leq d$ (con $d = 3{,}000 \cdot 10^{-1}$ m), il campo elettrostatico costante $\vec{E}$ orientato in senso opposto all'asse OX. È presente inoltre un solenoide disposto perpendicolarmente a tale piano, la cui sezione su OXY è la circonferenza γ. Il solenoide ha raggio $r = 4{,}000$ cm ed è costituito da $N = 100$ spire contigue di rame di resistività $\rho = 1{,}680 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$. Al suo interno è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}(t)$, il cui modulo è dato da

$$B(t) = a\left(\frac{bt^2 + 1}{ct^2 + 1}\right),$$

con $a = 5{,}000 \cdot 10^{-2}$ T, $b = 1{,}000 \cdot 10^{5}\ \mathrm{s}^{-2}$ e $c = 9{,}895 \cdot 10^{4}\ \mathrm{s}^{-2}$.

All'istante $t = 0$ s una particella di massa $m = 2{,}500 \cdot 10^{-24}$ kg e di carica $q = 3{,}204 \cdot 10^{-19}$ C, vincolata a muoversi nel piano OXY, si trova in O e ha una velocità iniziale $v_0 = 5{,}000 \cdot 10^{2}$ m/s orientata secondo l'asse OX. La particella entra nel solenoide all'istante t_i ed è soggetta a un campo magnetico la cui intensità ha raggiunto il 99,00% del suo estremo superiore.

1. Utilizzando il secondo principio della dinamica, determinare il modulo del campo elettrico e la velocità di entrata $v(t_i)$ della particella all'interno del solenoide. Stabilire le coordinate del punto di uscita della particella dal solenoide rispetto al sistema di riferimento $O'X'Y'$ della figura.



2. Verificare che la corrente indotta $i(t)$ nel solenoide ha il seguente modulo

$$|i(t)| = \frac{\pi r l^2}{4\rho N^2} a(b - c)\frac{t}{(ct^2 + 1)^2}$$

e determinare il suo verso. Inoltre, trovare il modulo e il verso del campo magnetico indotto $B_{ind}(t)$ nel solenoide. Trascurare gli effetti di autoinduzione.

Introdurre poi la seguente variabile adimensionale: $x = t\sqrt{c}$
e definire la seguente funzione: $f(x) = \frac{|i(x)|}{I}$, dove $I = \frac{\pi r l^2}{8\rho N^2} \cdot \frac{a(b-c)}{\sqrt{c}}$.

3. Dopo aver verificato che risulta $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, studiare la funzione $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$h(x) = |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

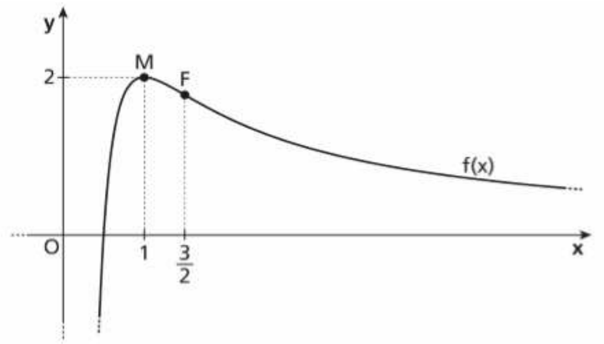
individuando, in particolare, eventuali punti di massimo, di minimo, di flesso. Tracciare il grafico della funzione h rappresentando anche le due rette tangenti p e q nel suo punto di non derivabilità.

Illustrare il fenomeno di induzione elettromagnetica in generale e nel caso del circuito RL: risolvere il circuito tramite l'uso delle equazioni differenziali.

Risolvere il seguente PROBLEMA.

Il diagramma in figura mostra una porzione del grafico di una funzione $f(x)$ che ha le seguenti caratteristiche:

- è definita in $]0;+\infty[$;
- ha asintoto verticale $x=0$;
- ha asintoto orizzontale $y=0$;
- ha il massimo assoluto nel punto $M(1;2)$;
- è monotòna crescente in $]0;1[$ e monotòna decrescente in $]1;+\infty[$;
- ha un punto di flesso F di ascissa $x=\frac{3}{2}$.

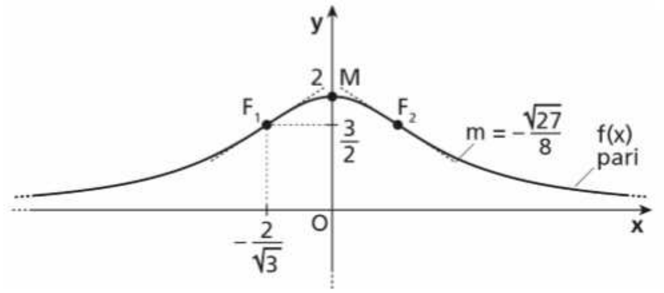


1. Tracciare il grafico qualitativo della funzione $f'(x)$.
2. Supponendo che la funzione $f(x)$ sia della forma $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}, con\ a\neq 0\ \ e\ b\neq 0$ determinare i valori di a e b.
3. Rappresentare il grafico completo di $f(x)$
4. Determinare l'espressione analitica della funzione integrale $F(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt \quad con\ x>\frac{1}{2}$.
5. Fornire un'interpretazione geometrica di $F(c)$, con $c>\frac{1}{2}$.
6. Studiare in particolare il $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e dare una interpretazione geometrica.
7. È corretto affermare che $f(x)=-\lambda F(x)$? Perché?
8. L'equazione, di cui al punto precedente, può essere interpretata come una particolare equazione differenziale, che bene interpreta un noto fenomeno fisico: quale?

Approfondire l'ultima richiesta del problema dato.

Risolvere il seguente PROBLEMA.

A. Quale delle seguenti equazioni può meglio rappresentare il grafico in figura e perché?

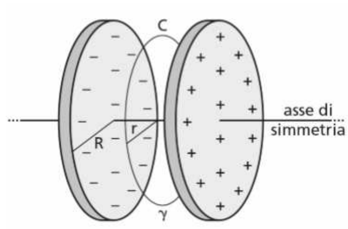


1. $y = 2e^{-x^2}$
2. $y = \frac{8}{|x^3|+4}$
3. $y = \frac{8}{x^2+4}$

B. A partire dal grafico di f(x) in figura dedurre il grafico qualitativo di f’(x), motivando i passaggi.

C. Dimostrare mediante la definizione di derivata che la derivata di una funzione derivabile e pari è dispari. Si può dire la stessa cosa delle primitive di una funzione pari?

D. Un condensatore piano ha le armature di forma circolare e di raggio R. Supporre trascurabili gli effetti al bordo.



Quale corrente passa tra le armature del condensatore? Perché?

E. Determinare l’espressione del campo magnetico indotto $B(t)$ a distanza r<R dall’asse del condensatore se l’intensità del campo elettrico tra le armature varia secondo la legge $E(t) = E_0 \cdot \frac{8}{t^2+4}$.

F. Cosa cambia nell’espressione trovata se r>R?

Argomentare la seguente affermazione.
<L’evoluzione della Fisica ha tratto impulso dall’opera di personaggi come Maxwell, Einstein, Planck e De Broglie che hanno saputo suggerire, a volte cambiamenti rivoluzionari, altre volte ingegnose reinterpretazioni della teoria accreditata precedentemente.>

Risolvere i seguenti QUESITI.

1. Tradurre nel linguaggio algebrico il seguente problema geometrico e poi risolvere il problema:
   Tra i coni retti circoscritti alla sfera di raggio r = 1 m, determinare il volume V del cono di superficie totale minima.

2. Seguire le indicazioni sottostanti per trasformare l'equazione di Schrödinger in un sistema di equazioni differenziali e poi ricavare quanto richiesto.

   Ad ogni particella è associata una funzione d'onda Ψ(x,y,z;t), dipendente dalle coordinate spaziali (x,y,z) e dal tempo t, che si ricava risolvendo l'equazione di Schrödinger i cui due membri sono entrambi uguali all'energia E della particella:

$$-\frac{1}{j}\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \nabla^2\Psi + U(x,y,z)\Psi$$

in cui:

- j è l'unità immaginaria ($j = \sqrt{-1}$)
- h è la costante di Planck ($h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J·s)
- m è la massa della particella
- $U(x,y,z)$ è l'energia potenziale, che dipende dalle coordinate spaziali (x,y,z)
- $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ è la derivata (parziale) della funzione Ψ rispetto al tempo t
- il simbolo $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ rappresenta l'*operatore di Laplace* (somma delle derivate seconde nelle tre direzioni spaziali): $\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$

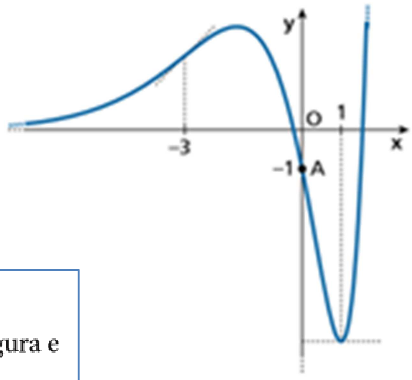
   Impostare il sistema equivalente all'equazione di Schrödinger.
   Ipotizzare Ψ(x,y,z;t) = ψ(x,y,z)φ(t) e risolvere l'equazione differenziale corrispondente al primo membro.

3. In un linguaggio di programmazione strutturata implementare l'algoritmo risolutivo di un problema scelto arbitrariamente nell'ambito della Matematica o della Fisica.

Riflettere sull'uso di linguaggi diversi all'interno della Matematica e della Fisica e sull'importanza della traduzione, da un linguaggio a un altro, per comprendere meglio il problema affrontato e rendere più evidenti le possibili soluzioni.

Risolvere i seguenti PROBLEMI.

1. È noto il grafico della funzione trascendente f(x) (in figura).



   a. Tracciare il grafico qualitativo di una primitiva della f(x).
   b. In base alle informazioni nel riquadro

      $$f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{-cx},$$

      dove a, b e $c \in \mathbb{R}$. Il grafico della funzione è riportato in figura e ha le seguenti caratteristiche:
      - ha un minimo di ascissa 1;
      - ha un flesso di ascissa -3;
      - interseca l'asse y in A.

      determinare il valore dei parametri a, b, c.

2. Sia f (x) una funzione continua da R in R, tale che:
   - $\int_0^2 f(x)\, dx = 3$;
   - $\int_0^4 f(x)\, dx = 11$;
   - $f(2x) = 4f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

   Dopo aver calcolato $\int_1^2 f(2x)\, dx$

   dedurre il valore di $\int_1^2 f(x)\, dx$.

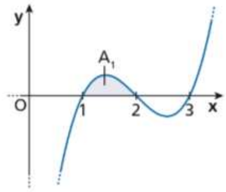
3. Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ \frac{x^2+1}{x^4} & x \geq 1 \end{cases}$ una funzione data a tratti.
   a. È continua per ogni x del dominio?
   b. Calcolare se possibile $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Delineare i vari tipi di integrale coinvolti nella risoluzione dei precedenti problemi e mettere in evidenza i loro legami reciproci, così come stabiliti da importanti e rivoluzionari teoremi di analisi standard. In particolare chiarire il concetto di integrale improprio.

Illustrare alcune possibili applicazioni dell'integrale alla Fisica e soffermarsi in particolare sul problema dell'irradiamento del corpo nero e sulle conseguenze rivoluzionarie determinate dal suo studio.

Risolvere i seguenti PROBLEMI

1. La funzione polinomiale di terzo grado f(x) ha il grafico in figura, in cui sono visibili i suoi zeri.



   a. Sapendo che $A_1=\frac{1}{4}$, dedurre l'espressione analitica della funzione f(x).
   b. Dimostrare che il grafico di f(x) è simmetrico rispetto a un punto P e individuare le coordinate di P.
   c. Sia k un parametro reale positivo. Dimostrare che l'integrale $\int_{2-k}^{2+k} f(x)dx$ è indipendente da k e calcolarne il valore.
   d. Calcolare il $\lim_{x\to 0} \frac{\int_2^{2+x}(t-2)f(t)dt}{senx}$.

2. La derivata di una funzione f(x) è $f'(x)=ax^2-3bx+4c$.
   a. Determinare i parametri a, b, c in modo che il grafico della funzione f(x) passi per l'origine del riferimento e per i punti A≡(1; -2) e B≡(-1; 0) e ammetta un punto di minimo di ascissa x = 2.
   b. Tracciare il grafico qualitativo della funzione così ottenuta.
   c. Stabilire se $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ è convergente, divergente o indeterminato.

Nella risoluzione dei due problemi dati è intervenuto più volte il concetto di limite, che in analisi standard si definisce attraverso l'uso dei quantificatori: illustrare la definizione di limite, nei vari casi in cui il limite è finito o infinito, e in corrispondenza di punti di accumulazione finiti o infiniti.

Applicare la definizione di limite per classificare gli andamenti asintotici di una funzione. Illustrare alcune funzioni della Fisica caratterizzate da comportamento asintotico e spiegare i fenomeni da esse descritte.

Risolvere il seguente PROBLEMA

1. Determinare il dominio della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x^4+1} - arctgx^2 + 1$ e le sue eventuali simmetrie notevoli. Si tratta di una funzione continua? Perché?
2. Dimostrare graficamente che l'equazione f(x)=0 ammette esattamente due soluzioni reali x_1 e x_2.
3. Dopo aver separato le due soluzioni, e dimostrato che è applicabile il metodo iterativo di bisezione, tramite esso, approssimare le soluzioni a meno di $\frac{1}{10}$. Quante iterazioni sono necessarie?
4. Tradurre il procedimento usato in un linguaggio di programmazione strutturata.
5. Studiare il comportamento della f(x) agli estremi del dominio e nei punti esclusi, evidenziando eventuali asintoti.
6. Studiare la derivata prima della f(x) e descrivere l'andamento della funzione.
7. Disegnare il grafico qualitativo della f(x).

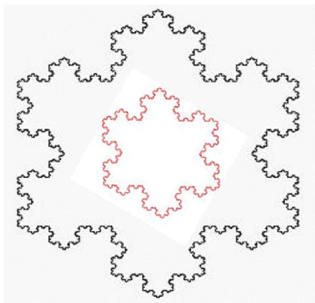
Stabilire un confronto tra il procedimento iterativo di bisezione, applicato nel problema, e alcuni processi iterativi descritti dalla Fisica, come per esempio la fissione nucleare. Descrivere dettagliatamente almeno uno di questi processi.

Risolvere i seguenti QUESITI e rispondere alle domande nell'ambito di una trattazione organica sul tema delle trasformazioni.

1. Data la funzione in due variabili di equazione $B(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$

   tracciare il suo grafico qualitativo rispetto alla variabile λ, considerando T un parametro, dopo aver determinato il suo dominio, gli asintoti e dimostrato che ammette almeno un punto di massimo.
   E' corretto affermare che il parametro T introduca una dilatazione lungo l'asse delle λ ? Perché? Tracciare il grafico qualitativo della funzione in corrispondenza di alcuni valori crescenti di T.
   Illustrare il significato fisico della funzione data e il suo ruolo nella costruzione della Fisica moderna.

2. Le linee nera e rossa in figura sono una 'doppia' dell'altra: cosa può significare questa affermazione?
   E' possibile individuare una omotetia che trasformi una figura nell'altra?
   E' possibile individuare assi di simmetria comuni alle due linee?
   Ognuna delle linee in figura è nota come 'fiocco di neve di Koch' ed è una curva frattale: cosa significa questa affermazione?



Disegnare l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.
Dopo aver traslato gli assi cartesiani in modo che l'origine si trovi sul fuoco di ordinata positiva, applicare alla ellisse, più volte successivamente, la rotazione avente centro nella nuova origine e angolo $\frac{\pi}{4}$, senza mai cancellare le figure di volta in volta trovate (scrivere anche l'equazione della rotazione).
Quale figura complessiva si ottiene? Quali altre figure già note assomigliano a quella trovata?

Risolvere i seguenti QUESITI.

1. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2}{x^2-2x+2}$. Indicato con M il suo punto di massimo assoluto, determinare le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione e passanti per M.

2. Sono date le funzioni

$$f(x) = \frac{65x^2}{16(x^3+1)}, \quad g(x) = \frac{1}{16}x^2.$$

Detti A e B i punti comuni ai grafici delle due funzioni, determinare l'area della regione R di piano delimitata dagli archi dei due grafici compresi tra A e B. Verificare che i punti A e B appartengono anche al grafico della funzione

$$h(x) = ax^3 + \left(\frac{1}{16} - 4a\right)x^2$$

per qualunque $a > 0$, quindi determinare il valore di $a > 0$ per il quale la regione R' delimitata dagli archi AB dei grafici di $g(x)$ e di $h(x)$ sia equivalente a R.

3. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} + bx + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Determinare il valore dei parametri reali a e b tali che la funzione risulti derivabile in $\mathbb{R}$. Tracciare il grafico della funzione deducendolo da quello di funzioni elementari.

Verificare che $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1; 6]$, determinando l'ascissa del punto che ne soddisfa la tesi.

4. Un osservatore B, solidale con un sistema di riferimento S', si muove con velocità v_1 rispetto a un altro osservatore A, che si trova in un sistema di riferimento inerziale S. Al tempo $t = t' = 0$ s, entrambi occupano la posizione $x = x' = 0$ m e la velocità relativa è rivolta nei semiassi positivi delle ascisse di entrambi i sistemi.

Si considerano due eventi:

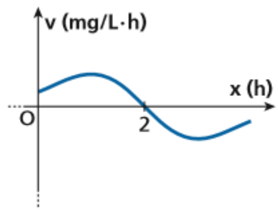
- E_1, in cui l'orologio di A indica l'istante $t_1 = 2{,}1 \cdot 10^2$ s e la sua coordinata spaziale in S' è $x_1' = -8{,}5 \cdot 10^{10}$ m;
- E_2, in cui l'orologio di B indica l'istante t_2' e la sua coordinata spaziale in S è $x_2 = 5{,}6 \cdot 10^{10}$ m.

Calcolare il rapporto $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$ e l'istante t_2'.

In un secondo caso abbiamo l'evento F_1, in cui la coordinata spaziale in S' dell'orologio di A è ancora x_1', e l'evento F_2, in cui la coordinata spaziale dell'orologio di B in S è ancora x_2. Determinare, se esiste, un valore $\beta_2 = \frac{v_2}{c}$ della velocità di S' rispetto a S per il quale i due eventi F_1 e F_2 sono simultanei in S.

Descrivere le novità introdotte da Einstein in campo relativistico e tratteggiare il passaggio dalla relatività ristretta a quella generale.

Risolvere il seguente PROBLEMA e rispondere alle domande nell'ambito di una trattazione organica interdisciplinare.



Il grafico a fianco mostra la velocità con cui varia la concentrazione del principio attivo di un farmaco nel sangue di un paziente nelle quattro ore successive all'assunzione. Esso rappresenta la funzione $v(x) = (2-x)e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$, $con\ 0 \leq x \leq 4$, della quale si chiede di dimostrare la disparità rispetto ad un opportuno sistema di riferimento. Illustrare l'unità di misura riportata sull'asse delle ordinate e spiegare in che senso è riferibile alla velocità di variazione di una concentrazione.

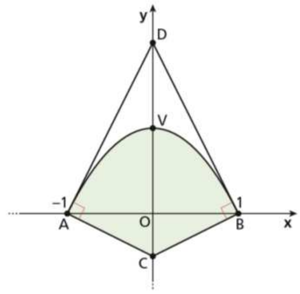
Stabilire, in base al grafico, dopo quante ore la concentrazione nel sangue del paziente è massima e calcolare il suo valore in mg/L, sapendo che prima dell'assunzione non c'è traccia del farmaco nel sangue del paziente.

Per risolvere il problema è stata usata una equazione differenziale?
In alternativa, è possibile risolvere il problema tramite una opportuna equazione differenziale?
È possibile assimilare il problema appena svolto ad altri già risolti nell'ambito della Fisica? Quali?

Siccome la funzione v(x) è di tipo esponenziale, si può assimilare la situazione del problema a quella del decadimento radioattivo? Perché?

Risolvere i seguenti QUESITI e motivare i passaggi.

1. Sia AVB l'arco della parabola y=a(1-x^2), compreso nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$, con a costante reale positiva. Siano AD e BD i segmenti tangenti all'arco nei punti A e B, e AC e CB i segmenti a essi perpendicolari rispettivamente in A e in B. Calcolare, in funzione di a, l'area S_1 della figura AVBC colorata in verde e determinare per quale valore di a tale area è minima. Dopo aver scritto in funzione di a l'area S_2 del quadrilatero ADBC, calcolare i limiti



$$\lim_{a \to +\infty} \frac{S_1}{S_2} \quad \text{e} \quad \lim_{a \to 0} \frac{S_1}{S_2}.$$

2. La funzione f (x), definita e continua in [0; +3[, è positiva e ha asintoto obliquo di equazione y = 12x - 1.
   Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x f(t)dt}{3x^2-\pi}$.

3. Calcolare il $\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{3sen(1-x)}$.

Per risolvere i quesiti è stato necessario determinare alcune forme indeterminate: illustrare i vari procedimenti adottati.
Se in matematica è possibile eliminare l'indeterminazione, ciò non sempre accade nell'ambito della Fisica: spiegare in che senso e quali sono le implicazioni di una tale impossibilità.

Risolvere il seguente PROBLEMA.

Un protone proveniente dalla direzione del Sole raggiunge l'atmosfera terrestre con velocità $v = 0{,}88\ c$, misurata nel sistema di riferimento terrestre.
Nel riferimento terrestre la distanza Sole-Terra è $D_{ST} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km.

Nel sistema di riferimento del protone calcolare:

1. la distanza d_{ST} Sole-Terra;

2. la durata Δt del viaggio Sole-Terra.

Un'astronave si allontana dalla Terra nella stessa direzione e nello stesso verso del protone. Nel sistema di riferimento della Terra, l'astronave ha velocità $w = 0{,}12\ c$.

3. Calcolare la velocità v_{pa} del protone nel sistema di riferimento dell'astronave.

La propulsione dell'astronave è garantita da motori che imprimono una forza costante $\vec{F}$ nella stessa direzione di moto dell'astronave. In questa situazione, il modulo a dell'accelerazione dell'astronave è legato al modulo della forza $\vec{F}$ dalla relazione

$$F = \gamma^3 ma, \qquad (1)$$

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, v è la velocità dell'astronave e m la sua massa.

4. Dimostrare che l'accelerazione dell'astronave è una funzione strettamente decrescente della sua velocità.

5. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{(1-x^2)^3}$ e tracciarne il grafico.

6. Calcolare le coordinate del punto P di intersezione tra le due tangenti inflessionali alla curva $y = f(x)$.

7. Tracciare il grafico approssimato della funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

8. Determinare la funzione inversa di $f(x)$ nella restrizione del dominio $I = [0; 1]$.

Il tema della relatività e dei sistemi di riferimento è intimamente legato a quello delle geometrie: spiegare in che senso?

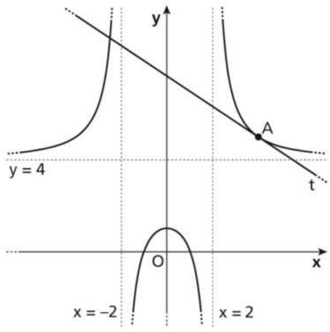
Risolvere i seguenti QUESITI.

5. La funzione $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+k}$, in cui $p(x)$ è un polinomio e $k \in \mathbb{R}$, ha il grafico in figura, che è simmetrico rispetto all'asse y.

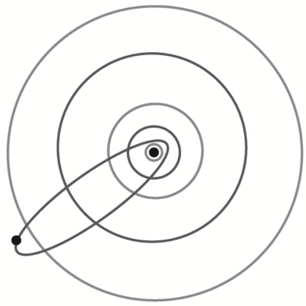
La retta t è tangente al grafico di $f(x)$ nel punto A di ascissa 4 e ha coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$.

Determinare il grado di $p(x)$ e l'espressione della funzione basandosi sulle informazioni che si possono dedurre dal grafico.

Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo della funzione $g(x) = xf(x)$.



6. La cometa di Halley orbita intorno al Sole con un periodo di circa 76,0 anni, descrivendo un'orbita ellittica molto eccentrica ($e = 0{,}967$); per questo motivo l'afelio (punto più lontano dal Sole) differisce molto dal perielio (punto più vicino al Sole). I valori orbitali della cometa all'afelio sono $v_{af} = 914$ m/s e $r_{af} = 35{,}1$ UA. Tenendo conto del principio di conservazione del momento angolare $\vec{L}$, il cui modulo è definito dalla relazione $L = mvr$ nei punti considerati:



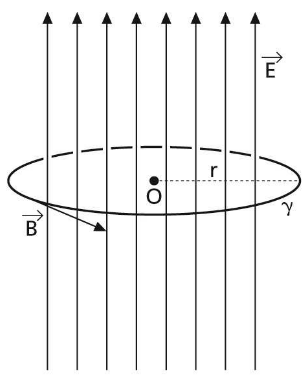
- verificare che le relazioni che indicano v_{pe} e r_{pe} (grandezze orbitali della cometa al perielio) sono le seguenti

$$v_{pe} = \frac{\sqrt{G^2 M_\odot{}^2 + 2E_s L_s{}^2} + GM_\odot}{L_s}, \qquad r_{pe} = \frac{L_s{}^2}{\sqrt{G^2 M_\odot{}^2 + 2E_s L_s{}^2} + GM_\odot},$$

  dove E_s e L_s sono, rispettivamente, l'energia e il modulo del momento angolare per unità di massa, G è la costante di gravitazione universale e $M_\odot$ è la massa del Sole;

- calcolare i valori numerici di v_{pe} e r_{pe}.

7. Un campo elettrico $\vec{E}$, uniforme e variabile nel tempo, genera un campo magnetico indotto $\vec{B}$. Si consideri una circonferenza γ di raggio r e di centro O perpendicolare al campo $\vec{E}$; si sa che il campo $\vec{B}$ è tangente a γ, nel piano che la contiene; inoltre, in tutti i punti di γ il suo modulo è dato dalla relazione $B(t) = \mu_0 \varepsilon_0 r a \frac{t^2}{bt^2+1}$, con $a = 5 \cdot 10^5 \, \frac{\mathrm{T\,m}}{\mathrm{s}^4}$ e $b = 2\ \mathrm{s}^{-2}$.



- Determinare il modulo del campo elettrico $\vec{E}$, supponendo che all'istante $t = 0$ s sia nullo.
- Verificare che esso non dipende da r.

Il fenomeno di induzione elettromagnetica è rappresentato da quella che diventerà una delle quattro equazioni di Maxwell, che consentono l’introduzione teorica del concetto di onda elettromagnetica. Spiegare come si genera l’onda elettromagnetica secondo questa teoria e rispondere alle seguenti domande: esiste almeno un’onda elettromagnetica? Esistono evidenze sperimentali di qualcosa che si comporta come previsto teoricamente da Maxwell? Descrivere la storica presa di coscienza di come la luce possa essere considerata un’onda elettromagnetica

(Richieste conclusive presenti in ogni traccia di elaborato)

Aggiungere anche eventuali collegamenti ad altri argomenti affini e una mappa concettuale rappresentativa dell’elaborato, al quale deve essere attribuito un titolo significativo.

Il file contenente l’elaborato deve avere la seguente intestazione:
Elaborato di Matematica e Fisica Cognome e nome Classe 5Bs

Inoltre deve essere in formato pdf e così nominato: 5Bs_CognomeNome_ PVLI02003

Restituire il file contenente l’elaborato all’indirizzo claudia.agostelli@galileididattica.it entro e non oltre il 13 giugno 2020.